ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVII, 12 SECTIO H 1983

Zakład Nauk Ekonomicznych
Filia UMCS w Rzeszowie

Adam GÓRAL, Bogdan LUDWICZAK

Próba porównania mocy testów Shapiro-Wilka i Hellwiga metodą Monte Carlo

Попытка сравнения силы тестов Шапиро-Вилька и Геллывига методом Монте-Карло

An Attempt to Compare the Power of the Tests of Shapiro-Wilk and Hellwig by the Monte Carlo Method

UWAGI WSTĘPNE

Badanie mocy testów statystycznych, rozumianej jako prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 w sytuacji, gdy prawdziwa jest hipoteza alternatywna H_1, stanowi przedmiot wielu prac z zakresu statystyki. W przypadku testów nieparametrycznych badanie ich mocy stało się możliwe na szeroką skalę po zastosowaniu metody Monte Carlo. Tę właśnie metodę postanowiono wykorzystać do porównania mocy testów Shapiro-Wilka i Hellwiga stosowanych do weryfikacji hipotezy głoszącej, że próba pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym. Wymienione testy zdecydowano się analizować głównie z powodu ich dużej użyteczności w przypadku małych prób (w praktyce statystycznej mamy często do czynienia właśnie z takimi próbami).

Należy zwrócić uwagę, że test Shapiro-Wilka należy do klasy specjalnych testów zgodności i stosuje się go jedynie do badania normalności rozkładu zmiennej losowej. Jak wykazali w swych pracach S. S. Shapiro i M. B. Wilk [1] oraz M. A. Stephens [2] test ten charakteryzuje się dużo

---

[1] S. S. Shapiro, M. B. Wilk: *An Analysis of Variance Test for Normality Complete Samples*, „Biometrika", 1965, nr 52.

[2] M. A. Stephens: *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparison*, „Journal of the American Statistical Association", 1974, nr 69.

wyższą mocą w porównaniu z klasycznymi testami zgodności[3], wykorzystywanymi do badania normalności rozkładu zmiennej losowej zarówno w przypadku znanych, jak i nieznanych parametrów tego rozkładu.

Test Hellwiga, w przeciwieństwie do testu omówionego, dopuszcza możliwość weryfikacji hipotez dotyczących szerokiej klasy rozkładów. Warto podkreślić, że Z. Hellwig, nie badając mocy proponowanego testu, podkreśla w pracy[4], że test ten może stanowić podstawę weryfikacji hipotezy zerowej tylko w przypadku, gdy jest stosowany obok innych testów zgodności. Tymczasem w polskiej literaturze statystycznej i ekonometrycznej spotyka się przykłady wykorzystywania procedur opartych na założeniu o normalności rozkładu zmiennej, a normalność tę bada się jedynie przy użyciu testu Hellwiga. Wydaje się, że wiarygodność takiego postępowania w sytuacji, gdyby omawiany test charakteryzował się niską mocą, można by łatwo podważyć. Powyższe fakty skłoniły autorów do podjęcia niniejszego tematu.

Praca składa się ze wstępu i trzech części. W dwóch pierwszych częściach omówiono zasady tworzenia statystyk będących podstawą omawianych testów. Test Shapiro-Wilka, ze względu na jego niewielką popularność w polskiej literaturze przedmiotu, został opisany obszerniej.[5] Część trzecia rozważań zawiera rezultaty badania mocy metodą Monte Carlo oraz wnioski końcowe.

TEST NORMALNOŚCI SHAPIRO-WILKA

Załóżmy, że $(y_1, ..., y_n)$ jest uporządkowaną rosnąco losową próbą zmiennej Y, której rozkład zostaje poddany weryfikacji. Niech hipoteza zerowa będzie hipotezą złożoną[6] o postaci:

$$H_0: F(Y) = F(Z), \tag{1}$$

gdzie:

---

[3] Pod pojęciem klasycznych testów zgodności należy rozumieć testy oparte na porównaniu dystrybuanty teoretycznej rozkładu zmiennej z dystrybuantą empiryczną. Jako przykład można podać: test χ^2, test Kołmogorowa, test Cramera-von Misesa, test Kuipera, test Watsona.

[4] Z. Hellwig: *Test zgodności dla małej próbki*, „Przegląd Statystyczny", 1965, nr 12.

[5] Opis procedury obliczeniowej statystyki będącej podstawą testu Shapiro-Wilka podał jedynie C. Domański w pracy: *Statystyczne testy nieparametryczne*, Warszawa 1979.

[6] Według C. Domańskiego (*op. cit.*, s. 13) hipotezą złożoną nazywamy każdą hipotezę, która nie jest prosta. Hipotezę nazywamy prostą, jeżeli całkowicie określa dystrybuantę zmiennej losowej.

F(Y) — dystrybuanta rozkładu badanej zmiennej,

F(Z) — dystrybuanta rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej (μ) oraz o nieznanej wariancji (σ^2).

Hipotezę alternatywną można w takim przypadku określić w następujący sposób:

$$H_1: F(Y) \neq F(Z). \qquad (2)$$

Jeżeli $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest uporządkowaną rosnąco, losową próbą pochodzącą z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej (μ) równej 0 i wariancji (σ^2) równej 1, to, jak łatwo zauważyć, zależność między y_i oraz x_i można wyrazić wzorem:

$$y_i = \mu + \sigma x_i \qquad (i=1, 2, ..., n), \qquad (3)$$

gdzie:

μ — wartość oczekiwana zmiennej Y,

σ — odchylenie standardowe tej zmiennej.

Przyjmijmy, że znane są:

wektor wartości oczekiwanych zmiennej X

$$m' = (m_1, m_2, ..., m_n), \qquad (4)$$

gdzie:

$$m_i = E(x_i) \qquad (i=1, 2, ..., n), \qquad (5)$$

oraz macierz kowariancji

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \sigma_2^2 & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

przy czym:

$$v_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j) \qquad (i, j=1, 2, ..., n). \qquad (7)$$

Parametry strukturalne równania (3) można oszacować w oparciu o uogólnioną teorię najmniejszych kwadratów A. C. Aitkena, minimalizując formę kwadratową ψ wyrażoną zależnością:

$$\psi = (y - \mu 1 - \sigma m)' V^{-1} (y - \mu 1 - \sigma m), \qquad (8)$$

gdzie:

$1' = (1, ..., 1)_{1xn}$,

$y' = (y_1, ..., y_n)$,

μ, σ, m określono powyżej.

Rezultatem minimalizacji formy ψ są wzory (9) i (10) oznaczające estymatory parametrów μ i σ. Wzory te przyjmują odpowiednio postać:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \tag{9}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{m' V^{-1} y}{m' V^{-1} m}. \tag{10}$$

Przy odpowiednich założeniach S. S. Shapiro i M. B. Wilk przyjęli do badania normalności rozkładu zmiennej statystykę o postaci:

$$W = \frac{R^4 \hat{\sigma}^2}{C^2 S^2} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}, \tag{11}$$

gdzie:

$$R^2 = m' V^{-1} m, \tag{12}$$

$$C^2 = m' V^{-1} V^{-1} m, \tag{13}$$

$$a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{m' V^{-1}}{(m' V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}, \tag{14}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2, \tag{15}$$

$$b = \frac{m' V^{-1} y}{(m' V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}. \tag{16}$$

Jak wykazały badania heurystyczne przeprowadzone przez autorów testu [7], w przypadku gdy próba $(y_1, \ldots, y_n)$ pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym, wartości licznika i mianownika ułamka (11) są do siebie zbliżone. Nie odnosi się to do przypadków dotyczących innych rozkładów (szczególnie rozkładów asymetrycznych).

WŁASNOŚCI STATYSTYKI W

Do najważniejszych własności statystyki W zalicza się [8]:

1) niezmienniczość względem skali i początku układu [9],

2) dla prób pochodzących z rozkładu normalnego W ma rozkład zależny jedynie od wielkości próby (n),

---

[7] Shapiro, Wilk: *An Analysis...*

[8] Por. *ibid.*, s. 593—594.

[9] Własność ta umożliwia stosowanie rozważanego testu do weryfikacji hipotez złożonych.

3) dla prób pochodzących z rozkładu normalnego W jest statystycznie niezależne od S^2 i $\bar{y}$,

4) $$E W^r = \frac{E \sigma^{2r}}{E S^{2r}} , \tag{17}$$

5) $\max W = 1$,

6) $$\min W = \frac{n a_1^2}{n-1} , \tag{18}$$

7) momenty rzędu 1/2 i 1 wyrazić można w następujący sposób:

$$E W^{1/2} = \frac{R^2 \Gamma(1/2(n-1))}{C \Gamma(1/2 n)\sqrt{2}} , \tag{19}$$

$$E W = \frac{R^2 (R^2 + 1)}{C^2 (n-1)} , \tag{20}$$

gdzie:

$R^2 = m'V^{-1}m$
$C^2 = m'V^{-1}V^{-1}m$.

Należy podkreślić, że rozkład statystyki W nie został określony formalnie. Autorzy testu podali[10] punkty krytyczne W (przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0) dla $n=3, 4, ..., 50$ oraz dla różnych poziomów istotności. W literaturze polskiej wybrane kwantyle rozkładu W można znaleźć w pracy C. Domańskiego[11].

PROCEDURA OBLICZENIOWA STATYSTYKI W

Z zależności (11) widać, że istotne znaczenie przy obliczaniu wartości statystyki W ma znajomość współczynników a_i zdefiniowanych wzorem:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot v^{ij}}{C} , \tag{21}$$

gdzie:

a_i — i-ty element wektora a' (14),
m_j — j-ty element wektora m' (4),

[10] S h a p i r o, W i l k: *An Analysis...*, s. 605.
[11] D o m a ń s k i: *Statystyczne testy...*

v^{ij} — element na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy V^{-1},

$C=(m'V^{-1}V^{-1}m)1/2$.

Sarhan i Greenberg podali[12] współrzędne wektora m' oraz elementy macierzy V dla $n \leq 20$. Stąd też obliczanie współczynników a_i dla $i=1, 2, \ldots, 20$ nie nastręcza większych trudności. W celu rozszerzenia możliwości wykorzystania testu W, Shapiro i Wilk zaproponowali[13] następującą procedurę aproksymacyjną:

$$\hat{a}_i = 2\, m_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{22}$$

$$\hat{a}_1^2 = \hat{a}_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))} & \text{dla } n \leqslant 20 \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} & \text{dla } n > 20 \end{cases} \tag{23}$$

Należy dodać, że H. L. Harter[14] określił wartości m_i dla $i>20$, niezbędne przy obliczaniu $\hat{a}_i$. Zastosowanie powyższej procedury aproksymacyjnej wydaje się słuszne ze względu na mały błąd aproksymacji (do 1%), który w dodatku maleje wraz ze wzrostem liczby obserwacji n. Wartości współczynników a_i zostały stablicowane przez autorów testu W.[15] Ponieważ w polskiej literaturze statystycznej analogiczną tablicę można znaleźć w pracy C. Domańskiego[16], zdecydowano się jej nie prezentować.

Weryfikując hipotezę H_0 (głoszącą, że próba pochodzi z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej i wariancji) przy wykorzystaniu testu Shapiro-Wilka można wyróżnić następujące etapy:

---

[12] A. E. Sarhan, B. G. Greenberg: *Estimation of Location and Scale Parameters by Order Statistics from Singly and Double Censored Samples*, „Annals of Mathematical Statistics", 1956, nr 29.

[13] Shapiro, Wilk: *An Analysis...*

[14] H. L. Harter: *Expected Values of Normal Order Statistics*, „Biometrika", 1961, nr 48.

[15] Shapiro, Wilk: *An Analysis...*

[16] Domański: *Statystyczne testy...*, s. 194—196.

1) porządkowanie próby $(x_1, x_2, ..., x_n)$ w celu otrzymania próby $(y_1, y_2, ..., y_n)$ charakteryzującej się własnością:

$$y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n,$$

2) obliczanie wartości statystyki W wg wzoru:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n/2} a_{n-i+1} (y_{n-i+1} - y_i))^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}, \qquad (24)$$

gdzie:

a_{n-i+1} — współczynniki odczytane z tablic [17],

[n/2] — część całkowita liczby n/2,

3) odczytanie z tablicy kwantyli rozkładu statystyki W [18] wartości krytycznej W_α dla przyjętego poziomu istotności α,

4) porównanie obliczonej wartości W z wartością krytyczną W_α. W przypadku, gdy $W < W_\alpha$ hipotezę H_0 należy odrzucić. Wśród prac poświęconych testowi Shapiro-Wilka na uwagę zasługuje praca Shapiro, Francia [19], której autorzy zaproponowali pewne modyfikacje testu W, głównie dla przypadku prób o liczebności ponad 50 elementów.

TEST ZGODNOŚCI HELLWIGA

Na wstępie należy podkreślić, że test Z. Hellwiga został skonstruowany dla małych prób, co niewątpliwie zadecydowało o jego dużej praktycznej użyteczności.[20]

Do głównych zastosowań omawianego testu można zaliczyć jego wykorzystanie do weryfikacji hipotezy dotyczącej normalności rozkładu. Jak wiadomo, poprawna weryfikacja takiej hipotezy jest warunkiem prawidłowości różnego rodzaju analiz ekonometrycznych.[21]. Test ten opiera się na twierdzeniu:

Jeżeli X jest zmienną losową mającą tę własność, że dostrybuanta

[17] *Ibid.*, s. 196.

[18] Tablicę taką można znaleźć w pracy Domańskiego (*ibid.*, s. 196) lub Shapiro-Wilka (*op. cit.*).

[19] S. S. Shapiro, R. S. Francia: *An Approximate Analysis of Variance Test of Normality*, „Journal of the American Statistical Association" 1972, nr 67.

[20] Z takimi właśnie próbami spotykamy się najczęściej w praktyce statystycznej i ekonometrycznej.

[21] Na szczególną uwagę zasługuje badanie normalności rozkładu reszt modelu ekonometrycznego.

F(X) tej zmiennej jest ciągła, to zmienna losowa $Y=F(X)$ ma rozkład jednostajny określony na odcinku $<0, 1>$.

Niech H_0 oznacza hipotezę statystyczną, że dystrybuanta zmiennej losowej X jest tożsamościowo równa funkcji $\psi(X)$. Powyższą hipotezę można więc określić jako:

$$H_0: F(X) \equiv \psi(X) \tag{25}$$

Jak łatwo zauważyć, hipoteza H_0 jest równoważna hipotezie H_0^1, którą wyraża się w następujący sposób:

$$H_0^1 : F_1(y) = \int_0^y dy , \tag{26}$$

gdzie:

$F_1(y)$ — dystrybuanta zmiennej losowej $Y=F(X)$.

Z. Hellwig zaproponował w pracy [22] weryfikację hipotezy H_0^1 lub H_0 w oparciu o liczbę k, którą nazwał liczbą pustych cel (tzn. liczbą cel, do których nie trafiła żadna wartość z próby). Liczba ta jest realizacją pewnej zmiennej losowej K, której dystrybuanta przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 (H_0^1) wyraża się następującą zależnością:

$$P_k(n, m) = \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s} \sum_{r=0}^{m-s} (-1)^r \binom{m-s}{r} \left(1 - \frac{s+r}{m}\right)^n , \tag{27}$$

gdzie:

n — liczba obserwacji w próbie $(x_1, x_2, ..., x_n)$,

m — liczba rozłączonych przedziałów, na które dzieli się przedział $<0, 1>$.

Łatwo zauważyć, że hipoteza H_0 (H_0^1) zostaje odrzucona na przyjętym poziomie istotności α, gdy zrealizowana wartość zmiennej losowej K będzie równa k_1 takie, że:

$$P_{k_1}(n, m) < \alpha \tag{28}$$

lub k_2 takie, że:

$$P_{k_2}(n, m) > 1 - \alpha \tag{29}$$

W przypadku (28) odrzucenie hipotezy H_0 wiąże się ze zbyt dużą zgodnością rozkładu empirycznego z teoretycznym rozkładem jednostajnym, zaś w przypadku (29) ze zbyt dużą rozbieżnością między wymienionymi rozkładami. Warto zwrócić uwagę, że podane przez Z. Hellwiga [23] wartości krytyczne k_α i $k_{1-\alpha}$ powinny być wykorzystywane w przypadku, gdy weryfikowana hipoteza jest prosta. W sytuacji, gdy weryfi-

---

[22] Z. Hellwig: *Test zgodności dla małej próbki*, „Przegląd Statystyczny" 1965, nr 12.

[23] *Ibid.*

kuje się hipotezę o normalności zmiennej losowej przy nieznanych parametrach μ i σ^2, pożądane wydaje się wykorzystanie wartości krytycznych zaproponowanych przez C. Domańskiego i A. Tomaszewicza [24]. Rozważając procedurę weryfikacji hipotezy złożonej o normalności rozkładu, przy wykorzystaniu testu Hellwiga, należy dokonać następujących obliczeń:

1) wyznaczyć tzw. cele, dzieląc odcinek $<0, 1>$ na $m=n$ równych części,

2) określić wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego dla poszczególnych u_i, gdzie [25]:

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s^2} \qquad (i = 1, 2, .., n), \qquad (30)$$

3) wyznaczyć liczbę pustych cel (przedziałów) k_0, przyporządkowując wartości dystrybuanty $\psi(u_i)$ przedziałom określonym w punkcie pierwszym procedury,

4) odczytać z tablic (np. rozkładu k) dla poziomu istotności α wartość krytyczną $k_{1-\alpha}$ [26],

5) odrzucić hipotezę H_0, gdy $k_0 \geq k$

W oparciu o podane dotychczas rozważania w dalszej części pracy omówiona zostanie próba porównania mocy testów Hellwiga i Shapiro--Wilka w przypadku, gdy wykorzystuje się je do weryfikacji hipotezy złożonej o normalności rozkładu na podstawie małych prób.

PORÓWNANIE MOCY TESTÓW HELLWIGA I SHAPIRO-WILKA METODĄ MONTE CARLO

Jak wiadomo, rozwiązanie szeregu zagadnień z zakresu statystyki stało się możliwe dopiero po zastosowaniu EMC. Należy do nich między innymi badanie mocy testów nieparametrycznych. Brak możliwości określenia mocy tych testów w ujęciu formalnym skłonił niektórych badaczy do zastosowania w tym celu metody Monte Carlo.

Zdecydowano się analizować rozważane testy tylko w przypadku ich zastosowania do weryfikacji hipotezy złożonej o normalności dla małych prób ($n \leq 30$). Hipotezę zerową (próba pochodzi z rozkładu normalnego

[24] C. Domański, A. Tomaszewicz: *Uwagi o teście zgodności Hellwiga.* „Przegląd Statystyczny” 1976, nr 23.

[25] Należy zwrócić uwagę, że we wzorze 30

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

[26] Brane są pod uwagę jedynie wartości $k_{1-\alpha}$, gdyż hipoteza zerowa nie dotyczy losowności próby.

o nieznanych parametrach) weryfikowano wobec szerokiej klasy hipotez alternatywnych, dotyczących rozkładów najbardziej istotnych ze statystycznego punktu widzenia.

Do generowania prób pochodzących z populacji o określonych rozkładach wykorzystano uwagi zawarte w pracy R. Zielińskiego [27] oraz standardowe podprogramy maszyny cyfrowej CYBER 72 systemu CDC 6600. Należy podkreślić, że dla każdego wybranego rozkładu generowano po 2000 prób 10-elementowych oraz po 1000 prób 20- i 30-elementowych (zgodnie z zasadami prowadzenia badań masowych). Każdorazowo w oparciu o wygenerowany ciąg liczb, na poziomie istotności $\alpha=0,05$, weryfikowano hipotezę o normalności przy pomocy testów Hellwiga i Shapiro--Wilka.

Ze względu na określenie mocy testu jako prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy H_0, gdy prawdziwa jest hipoteza alternatywna H_1, w badaniach starano się określić procentowy udział liczby hipotez odrzuconych w ogólnej liczbie prób, w sytuacji, kiedy każda z tych prób pochodziła z określonego, ale różnego od normalnego, rozkładu. Rezultaty tak prowadzonych badań zawarto w tabeli 1.

Moc testu Hellwiga i Shapiro-Wilka dla wybranej klasy hipotez alternatywnych
The powers of the tests of Hellwig and Shapiro-Wilk for a chosen class of alternative hypotheses

Generowany rozkład	Test Hellwiga			Test Shapiro-Wilka		
	n=10	n=20	n=30	n=10	n=20	n=30
t_1[a]	22,1	55,8	66,0	59,7	87,2	94,4
t_2	1,7	6.6	4,6	17,7	34,3	43,7
t_4	0,9	0,3	2,3	11,5	22,9	29,8
t_6	0,4	3,3	0,9	9,0	13,6	14,9
χ_1^2[b]	19,1	68,7	78,0	71,3	97,9	99,7
χ_3^2	2,5	13,1	11,7	27,8	65,1	83,9
χ_4^2	1,7	9,9	6,9	20,9	49,0	70,7
χ_{10}^2	1,0	4,1	1,7	10,5	22,4	31,9
Wykładniczy	5,7	28,5	29,8	42,7	84,1	97,5
Równomierny	1,7	8,4	6,9	8,1	20,5	38,8
Cauchy'ego	22,7	56,1	66,9	58,4	85,2	96,2
Logarytmiczno--normalny	12,0	50,2	56,7	59,0	92,9	99,2

[a] t_1 — rozkład t-Studenta o 1 stopniu swobody.
[b] χ_1^2 — rozkład χ^2 o 1 stopniu swobody.
Źródło: Obliczenia własne.

[27] R. Zieliński: *Generatory liczb losowych*, Warszawa 1972.

Uzyskane rezultaty pozwalają stwierdzić, że im bardziej rozkład, z którego pochodzi generowana próba, różni się od rozkładu normalnego, tym wyższą mocą charakteryzują się rozważane testy.

Łatwo zauważyć, że praktycznie w każdym przypadku test Shapiro-Wilka charakteryzuje się dużo wyższą mocą niż test Hellwiga. Moc testu Hellwiga mieści się w rozsądnych granicach jedynie w przypadku rozkładów znacznie różniących się od normalnego (χ_1^2, t_1, rozkład Cauchy'ego). Należy jednakże podkreślić, że stosunkowo niewielkie prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju (dla szerokiej klasy hipotez alternatywnych) w przypadku testu Shapiro-Wilka wydaje się zrozumiałe, jeśli weźmie się pod uwagę fakt, że test ten został skonstruowany jedynie do weryfikacji hipotezy dotyczącej normalności rozkładu badanej zmiennej.

Na podstawie powyższych uwag wydaje się, że test Hellwiga powinien być stosowany do weryfikacji hipotezy złożonej o normalności rozkładu zmiennej jedynie obok innych testów zgodności. W przypadku, gdy badacz decyduje się wykorzystać tylko jeden test statystyczny dużo bardziej uzasadnione wydaje się wykorzystanie testu Shapiro-Wilka.

Na zakończenie powyższych rozważań warto podkreślić, że w pracach Shapiro, Wilka [28] i Stephensa [29] porównywano moc testu Shapiro-Wilka z mocą klasycznych testów zgodności. Porównanie to, podobnie jak w niniejszej pracy wypadło na korzyść testu W [30].

Rezultaty uzyskane przez S. S. Shapiro, M. B. Wilka, L. M. Stephensa oraz autorów wskazują konieczność szerszego wykorzystania testu W, niż ma to miejsce obecnie, do weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu zmiennej na podstawie małej próby.

РЕЗЮМЕ

Предпринята попытка сравнения силы двух статистических тестов (Гелльвига и Шапиро-Вилька), очень удобных для проверки гипотезы о нормальности распределения переменной в случае, когда исследователь располагает небольшой статистической выборкой. В исследовании силы этих тестов применен метод Монте-Карло. Особое внимание обращено на недостаточно популярный в польской литературе по статистике тест Шапиро-Вилька.

---

[28] Shapiro, Wilk: *An Analysis...*

[29] Stephens: *EDF Statistics for Goodness...*

[30] Rezultaty uzyskane przez autorów dla testu Shapiro-Wilka są bardzo zbliżone do tych, które uzyskał Stephens (*ibid.*).

SUMMARY

The paper undertakes an attempt to compare the powers of two statistical tests (Hellwig's and Shapiro-Wilk's) which are very useful for the verification of the hypothesis about the normal distribution of a variable in the case when the researcher has only a small statistical sample at his disposal. The Monte Carlo method was employed for the examination of the powers of these tests. Special attention was paid to Shapiro-Wilk's test because of its relatively small popularity in Polish statistical literature.